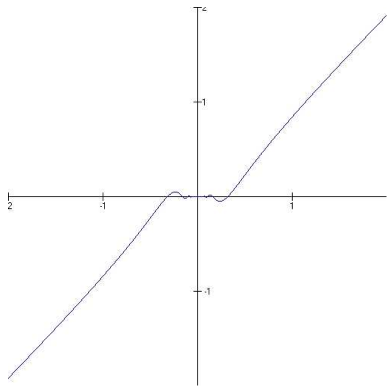
Discutere la derivabilità della seguenti funzione definita su tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Il grafico della funzione data è il seguente:



La funzione f è continua anche in $x = 0$; infatti

$$0 \leq |x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq x^2$$

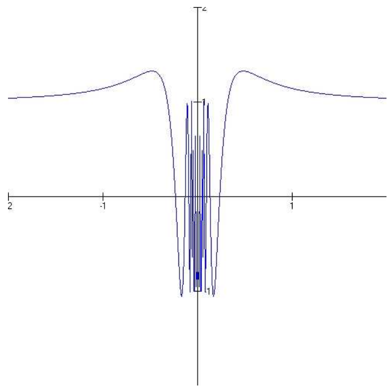
e si applica nuovamente il Teorema del confronto per i limiti. Andiamo a calcolare, se esiste, $f'(0)$ (altrove non ci sono problemi di derivabilità):

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0.$$

Ne segue che f è derivabile anche in $x = 0$. f' è data da, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

la quale ha grafico:



Si evince dal grafico, e si verifica direttamente, che f' non ha limite per $x \to 0$; ne segue che f' non è una funzione continua. Dunque f è una funzione derivabile in $x = 0$, ma con derivata non continua in $x = 0$.