

Discutere la derivabilità della seguente funzione definita su tutto \mathbb{R} :

$$f(x) = \arctan(-2x^3) - 2|x|x^3.$$

SOLUZIONE. f è derivabile, per composizione, in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(-2h^3) - 2|h|h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(-2h^3)}{-2h^3}(-2h^2) - \lim_{h \rightarrow 0^+} 2|h|h^2 = 0;$$

mentre, con un conto del tutto identico

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\arctan(-2h^3) - 2|h|h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\arctan(-2h^3)}{-2h^3}(-2h^2) - \lim_{h \rightarrow 0^-} 2|h|h^2 = 0.$$

Ne segue che f è derivabile anche in $x = 0$.