Per ciascuna delle seguenti funzioni, si dimostri che esiste ed è derivabile la funzione inversa, denotata con g, e si calcoli la quantità a fianco indicata.

(1)

$$f(x) = 3x + 2 + e^{4x}, \quad \frac{3}{g'(3)} = ?$$

(2)

$$f(x) = 2x^4 + 3\log x, \quad \frac{2}{g'(2)} = ?$$

(3)

$$f(x) = e^{-6x} - 6x + 1, \quad \frac{1}{g'(2)} = ?$$

(4)

$$f(x) = e^{6(x-1)} + 6x^5, \quad \frac{1}{g'(7)} = ?$$

(5)

$$f(x) = 7x + \sin(x+1), \quad \frac{7}{g'(-7)} = ?$$

SOLUZIONE.

(1) La funzione data è definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$; inoltre si ha

$$f'(x) = 3 + 4e^{4x} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dunque f è strettamente monotona (crescente), dunque invertibile, e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ora si ha

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 0$$

e dunque

$$g'(3) = \frac{1}{f'(0)} = 1/7$$

da cui

$$\frac{3}{g'(3)} = 21.$$

(2) La funzione data è definita e derivabile in $(0, +\infty)$; inoltre si ha

$$f'(x) = 8x^3 + \frac{3}{x} > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Dunque f è strettamente monotona (crescente), dunque invertibile, e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Ora si ha

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

e dunque

$$g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{11}$$

da cui

$$2/g'(2) = 22.$$

(3) La funzione data è definita e derivabile in tutto $\mathbb{R}$; inoltre si ha

$$f'(x) = -6e^{-6x} - 6 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dunque f è strettamente monotona (decrescente), dunque invertibile, e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ora si ha

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

e dunque

$$g'(2) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{12}$$

da cui

$$\frac{1}{g'(2)} = -12.$$

(4) La funzione data è definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$; si ha

$$f'(x) = 6e^{6(x-1)} + 30x^4.$$

f è dunque invertibile, e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dal momento che

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow x = 1$$

si ha

$$g'(7) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{36},$$

da cui $\frac{1}{g'(7)} = 36$.

(5) La funzione data è definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$; si ha

$$f'(x) = 7 + \cos(x+1).$$

f è strettamente crescente, dunque invertibile, e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dal momento che

$$f(x) = -7 \Leftrightarrow x = -1$$

si ha

$$g'(-7) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{8},$$

da cui $\frac{7}{g'(-7)} = 56$.