Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^k e^x, \quad k \in \mathbb{N}_+.$$

SOLUZIONE. Il limite dato si presenta in forma indeterminata $\infty \cdot 0$; lo riscriviamo come

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)^k}{e^{-x}}$$

la quale stavolta è una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Posto $f(x) = (-x)^k$ e $g(x) = e^{-x}$, si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-k(-x)^{k-1}}{-e^{-x}} = \frac{k(-x)^{k-1}}{e^{-x}}.$$

Derivando ancora si ha

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{k(k-1)(-x)^{k-2}}{e^{-x}}.$$

Se deriviamo fino a quando l'esponente di x al numeratore diventa 0, allora otteniamo una espressione del tipo

$$\frac{c}{e^{-x}}$$

con $c \in \mathbb{R}$, la quale ha limite 0 per $x \to -\infty$. Per il Teorema di de l'Höpital allora

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^k e^x = 0.$$