Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x, \qquad \alpha > 0.$$

SOLUZIONE. Il limite dato si presenta in forma indeterminata $0 \cdot \infty$; lo riscriviamo come

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}}$$

la quale stavolta è una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Posto $f(x) = \log x$ e $g(x) = x^{-\alpha}$, si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha x^{-\alpha}} = -\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}$$

la quale tende a 0 per $x \to 0^+$. Per il Teorema di de l'Höpital allora

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0.$$