

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos x}{x^2}.$$

SOLUZIONE. Il limite si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$; posto $f(x) = \cos(2x) - \cos x$ e $g(x) = x^2$ si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-2 \sin(2x) + \sin x}{2x}$$

la quale è ancora in forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Quindi

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-4 \cos(2x) + \cos x}{2} \rightarrow -\frac{3}{2}.$$

Per il Teorema di de l'Hôpital, applicato due volte, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos x}{x^2} = -\frac{3}{2}.$$