

Calcolare la derivata della funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{x^2 - y^2}$$

nel punto $(1, 1)$, rispetto alla generica direzione $\vec{u} = v\vec{i} + w\vec{j}$.

SOLUZIONE. Calcoliamo il gradiente di f : si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xe^{x^2 - y^2} + (x^2 - y^2)e^{x^2 - y^2} 2x = \\ &= 2xe^{x^2 - y^2} (1 + x^2 - y^2)\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2ye^{x^2 - y^2} + (x^2 - y^2)e^{x^2 - y^2} (-2y) = \\ &= -2ye^{x^2 - y^2} (1 + x^2 - y^2).\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot (v\vec{i}_1 + w\vec{j}) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)v + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)w = 2v - 2w.$$