Sia

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Verificare che f è continua e derivabile ovunque, ma non è differenziabile in $(0,0)$.

SOLUZIONE. Si ha

$$0\le\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Dal teorema del confronto, si deduce che f è continua in $(0,0)$; altrove è composizione di funzioni continue, dunque continua. Inoltre, sempre per lo stesso motivo, f è sicuramente derivabile in $(x,y)\neq(0,0)$. Ora

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.$$

Allora f è derivabile parzialmente anche in $(0,0)$. Andiamo a controllare se il differenziale è quindi l'applicazione nulla (come solo quella potrebbe essere); calcoliamo allo scopo

$$\lim_{|(x,y)|\to 0}\frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{|(x,y)|\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

il quale non esiste. Infatti lungo la retta $y=mx$ si ha

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

Ne segue che f non è differenziabile in $(0,0)$.