Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^7 + x^2y + x^2y^5}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilire se

a) *f è continua in $(0,0)$;*

b) *f è differenziabile in $(0,0)$.*

SOLUZIONE. Si ha

$$0 \leq \left| \frac{y^7 + x^2y + x^2y^5}{x^2+y^4} \right| = \frac{|(x^2+y^4)y - y^5 + x^2y^5 + y^7|}{x^2+y^4} \leq$$

$$\leq |y| + |y^2 + x^2 - 1| \frac{|y^5|}{x^2+y^4} \leq |y| + |y^2+x^2-1||y| \to 0.$$

Dal Teorema del confronto si ha la continuità di f nell'origine.

Quanto alla differenziabilità in $(0,0)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} t^2 = 0, \quad x \neq 0.$$

f non è differenziabile nell'origine; infatti il differenziale dovrebbe essere l'applicazione nulla, ma si ha che

$$\lim_{|(x,y)|\to 0} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

non esiste, dal momento che lungo $y = mx$ si trova, se $x > 0$,

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{m^7x^4 + m + x^4m}{(1+m^4x^2)\sqrt{1+m^2}} \to \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$