Sia $u\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} xu'(x) + 2u(x) = 0 \\ u(1) = 3. \end{cases}$$

Calcolare $u''(1)$ *e* $8u'(2)$.

SOLUZIONE. Per quanto riguarda la prima richiesta, non è necessario risolvere l'equazione. Infatti si ha

$$u'(1) + 2u(1) = 0$$

da cui $u'(1) = -6$; derivando l'equazione si trova

$$u'(x) + xu''(x) + 2u'(x) = 0$$

da cui $u''(1) = -3u'(1) = 18$. Risolviamo ora l'equazione data; si ha

$$u(x) = ce^{-\log(x^2)} = \frac{c}{x^2}.$$

Inserendo la condizione iniziale si trova ovviamente $c = 3$. Ne segue che

$$u'(x) = -\frac{6}{x^3}$$

da cui $8u'(2) = -6$.