Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = e^{-u(x)} \log x \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE. L'equazione è variabili separabili; si ha quindi

$$\int e^u du = e^u + k_1$$

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x(\log x - 1) + k_2.$$

Allora

$$e^{u(x)} = x(\log x - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

da cui

$$u(x) = \log\big(x(\log x - 1) + c\big).$$

Infine la condizione $u(1) = 0$ dà:

$$0 = u(1) = \log(-1 + c) \Longrightarrow c = 2.$$

Dunque

$$u(x) = \log\big(x(\log x - 1) + 2\big).$$

Anche qui non si pone il problema di $e^u = 0$, poichè non capita mai. Il dominio della soluzione è quindi il dominio della u trovata.