*Data l'equazione differenziale*

$$u(x)u'(x) = x\sqrt[4]{1-u^2(x)}$$

*determinare la soluzione generale, in forma implicita, e trovare, se esistono, le soluzioni particolari dei problemi di Cauchy:* $u(0) = 2$; $u(0) = \frac{1}{2}$.

SOLUZIONE. Risolviamo l'equazione data come equazione a variabili separabili; calcoliamo quindi

$$\int \frac{u}{\sqrt[4]{1-u^2}} du = -\frac{1}{2} \int \frac{-2u}{\sqrt[4]{1-u^2}} du =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(1-u^2)^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + k_1 = -\frac{2}{3}\sqrt[4]{(1-u^2)^3} + k_1$$

e

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + k_2.$$

Allora la soluzione è data da

$$-\frac{2}{3}\sqrt[4]{(1-u^2(x))^3} = \frac{x^2}{2} + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tale soluzione è locale, e si estende, oltre al suo dominio, fino a che $u = 0$ od $u = \pm 1$, condizioni proibite in partenza, poichè annullano o rendono indefinita $b(u)$. Per quanto riguarda i problemi di Cauchy, il primo, $u(0) = 2$, darebbe

$$2 = u(0) \iff -\frac{2}{3}\sqrt[4]{-27} = c$$

che non ha soluzioni reali; il secondo invece dà

$$u(0) = \frac{1}{2} \iff -\frac{2}{3}\sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = c.$$