Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = -\dfrac{u(x)}{x} + \dfrac{u(x)^2 \log x}{x} \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Avendo che $u = 0$ risolve il problema di Cauchy $u(1) = 0$, dividiamo i membri per u^2; si trova

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{1}{u(x)x} + \frac{\log x}{x}.$$

Poniamo $v(x) = u(x)^{-1}$; allora l'equazione diventa

$$v'(x) = \frac{v(x)}{x} - \frac{\log x}{x},$$

che è lineare; si ha quindi

$$v(x) = cx + 1 + \log x.$$

Quindi

$$u(x) = \frac{1}{cx + 1 + \log x}.$$

Inserendo la condizione $u(1) = 1$ si trova $c = 0$, per cui la soluzione finale è data da

$$u(x) = \frac{1}{1 + \log x}.$$