Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = -(u(x)^2 + u(x)\tan x + 1 + \tan^2 x \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

sapendo che $u = \tan x$ *è una soluzione particolare dell'equazione data.*

SOLUZIONE. Effettuiamo il cambio di variabile

$$v(x) = u(x) - \tan x;$$

allora l'equazione data equivale a

$$v'(x) = -v(x)^2 - v(x)\tan x.$$

Non cercando la soluzione nulla, possiamo dividere per $v(x)^2$; si trova

$$\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -1 - \frac{\tan x}{v(x)}.$$

Poniamo ora $w(x) = (v(x))^{-1}$; l'equazione diventa finalmente

$$w'(x) = w(x)\tan x + 1,$$

che ha come soluzioni

$$w(x) = \frac{\sin x + c}{\cos x}.$$

Dunque

$$v(x) = \frac{\cos x}{c + \sin x}$$

e

$$u(x) = \tan x + \frac{\cos x}{c + \sin x}.$$

Inserendo la condizione $u(0) = 1$ si trova $c = 1$, per cui la soluzione è data da

$$u(x) = \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$