Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) = x^2, \qquad x > 0.$$

SOLUZIONE. Poniamo $u'(x) = v(x)$; allora l'equazione diventa

$$v'(x) + \frac{1}{x}v(x) = x^2$$

che ha come soluzioni

$$v(x) = e^{-\log x} \int x^2 e^{\log x} dx = \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) =$$

$$= \frac{c_1}{x} + \frac{x^3}{4}.$$

Dunque

$$u'(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{x^3}{4}$$

da cui

$$u(x) = c_1 \log x + \frac{x^4}{16} + c_2.$$