Sia $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) - 6u'(x) - 7u(x) = 0 \\ u(0) = 3 \\ u'(0) = 5. \end{cases}$$

Calcolare $u''(0)$ e $u(1)$.

SOLUZIONE. Si ha

$$u''(0) = 6u'(0) + 7u(0) = 51.$$

Quanto alla seconda richiesta, calcoliamo l'integrale generale. L'equazione caratteristica è data da

$$\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$$

che ha come soluzioni $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = -1$. Quindi l'integrale generale è dato da

$$u(x) = c_1 e^{7x} + c_2 e^{-x}.$$

Imponendo la condizione $u(0) = 3$ si trova $c_1 + c_2 = 3$; si ha poi

$$u'(x) = 7c_1 e^{7x} - c_2 e^{-x},$$

da cui $u'(0) = 5$ fornisce $7c_1 - c_2 = 5$. Quindi si ha $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$. Ne segue che la soluzione particolare è data da

$$u(x) = e^{7x} + 2e^{-x}.$$

Quindi $u(1) = e^7 + 2e^{-1}$.