Sia $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

Calcolare $u'''(0)$ *e* $\log\left(\frac{1}{4u(4)}\right)$.

SOLUZIONE. Dall'equazione si ha

$$u''(0) = 6u'(0) + -9u(0) = 6.$$

Derivando l'equazione si trova

$$u'''(x) = 6u''(x) - 9u'(x),$$

da cui $u'''(0) = 27$. Quanto alla seconda richiesta, calcoliamo l'integrale generale. L'equazione caratteristica è data da

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

che ha come soluzioni $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Quindi l'integrale generale è dato da

$$u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}.$$

Imponendo la condizione $u(0) = 0$ si trova $c_1 = 0$; si ha poi

$$u'(x) = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x},$$

da cui $u'(0) = 1$ fornisce $c_2 = 1$. Ne segue che la soluzione particolare è data da

$$u(x) = xe^{3x}.$$

Quindi $u(4) = 4e^{12}$, da cui $\log\left(\frac{1}{4u(4)}\right) = 12$.