Sia $u \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + 6u'(x) = 24e^{-2x} \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Calcolare $u'''(0)$ e $u'(1)$.

SOLUZIONE. Si ha

$$u''(x) = 24e^{-2x} - 6u'(x)$$

da cui $u''(0) = 24$; derivando si ha

$$u'''(x) = -48e^{-2x} - 6u''(x)$$

e quindi $u'''(0) = -48 - 144 = -192$. Risolviamo ora l'equazione; l'equazione carattersitica è data da

$$\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

che ha le soluzioni $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -6$; ne segue che l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$\bar{u}(x) = c_1 + c_2 e^{-6x}.$$

Il termine noto è di tipo esponenziale, con esponente $-2x$. Non essendo -2 radice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$u_p(x) = ae^{-2x}.$$

Si ha

$$u_p'(x) = -2ae^{-2x}; \quad u_p''(x) = 4ae^{-2x}.$$

Inserendo il tutto nell'equazione data si ha

$$4ae^{-2x} - 12ae^{-2x} = 24ae^{-2x} \iff a = -3.$$

La soluzione generale è quindi data da

$$u(x) = c_1 + c_2 e^{-6x} - 3e^{-2x}.$$

La condizione $u(0) = 1$ dà $c_1 + c_2 = 4$; intanto si ha

$$u'(x) = -6c_2 e^{-6x} + 6e^{-2x}$$

per cui $u'(0) = 0$ restituisce $c_2 = 1$. Dunque $c_1 = 3$, e la soluzione risulta essere

$$u(x) = 3 + e^{-6x} - 3e^{-2x}$$

da cui

$$u'(x) = -6e^{-6x} + 6e^{-2x}.$$

Ne segue che $u'(1) = -6e^{-6} + 6e^{-2}$.