Sia $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(x) = 4\cos x u(x) + \cos x \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Calcolare $u'(0) + u''(0)$ *e* $u(\pi) - u'(\pi)$.

SOLUZIONE. Per la prima richiesta si ha

$$u'(0) = 4u(0) + 1 = 5$$

mentre, derivando l'equazione,

$$u''(x) = -4\sin x u(x) + 4\cos x u'(x) - \sin x$$

da cui $u''(0) = 20$; allora $u'(0) + u''(0) = 25$. Risolviamo ora l'equazione. Si ha

$$u(x) = e^{4\sin x} \int \cos x e^{-4\sin x} dt = e^{4\sin x} \left(-\frac{1}{4} e^{-4\sin x} + c \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} + c e^{4\sin x}.$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene $c = \frac{5}{4}$, da cui

$$u(x) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} e^{4\sin x}$$

e quindi

$$u'(x) = 5\cos x e^{4\sin x}$$

da cui $u(\pi) - u'(\pi) = 6$.