Sia $u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u''(x)-5u'(x)+4u(x)=0 \\ u(0)=2 \\ u'(0)=5. \end{cases}$$

Calcolare $u^{(iv)}(0)$. *Considerata poi l'equazione*

$$u''(x)-5u'(x)+4u(x)=e^{4x},$$

provare che tutte le soluzioni verificano la condizione

$$\lim_{x\to-\infty} u(x)=0.$$

SOLUZIONE. Anzitutto si ha $u''(0)=5u'(0)-4u(0)=25-8=17$. Poi

$$u'''(x)=5u''(x)-4u'(x)$$

da cui $u'''(0)=85-20=65$. Infine

$$u^{(iv)}(x)=5u'''(x)-4u''(x)$$

che dà $u^{iv}(0)=325-68=257$. Quanto alla seconda parte si ha che l'equazione caratteristica è data da

$$\lambda^2-5\lambda+4=0$$

cha ha come soluzioni $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=4$. Pertanto le soluzioni dell'omogenea associata sono date da

$$\bar{u}(x)=c_1e^x+c_2e^{4x}.$$

In questo caso l'esponente del termine noto contiene una radice caratteristica semplice; cerchiamo quindi soluzioni particolari della forma

$$u_p(x)=axe^{4x}.$$

Si ha

$$u_p'(x)=ae^{4x}+4axe^{4x}, \qquad u_p''(x)=8ae^{4x}+16axe^{4x}.$$

Inserendo il tutto nell'equazione si trova

$$e^{4x}(16ax+8a-5a-20ax+4ax)=e^{4x}$$

per ogni $x\in\mathbb{R}$, ovvero $a=\frac{1}{3}$. La soluzione generale è quindi data da

$$u(x)=c_1e^x+c_2e^{4x}+\frac{1}{3}xe^{4x}$$

da cui

$$\lim_{x\to-\infty} u(x)=0, \qquad \forall c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$