Sia $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problama di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = 3x \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 4. \end{cases}$$

Calcolare $u'(2\pi) + \frac{u(\pi)}{\pi}$.

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica risulta essere

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

che ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm i$. Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$\bar{u}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Il secondo membro è di tipo polinomiale, e 3 non è radice caratteristica, per cui cerchiamo, come soluzione particolare un polinomio del tipo $u_p(x) = ax$. Si vede subito che $u_p(x) = 3x$ è soluzione particolare, essendo $u_p''(x) = 0$. Allora l'integrale generale dell'equazione data è

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 3x.$$

La condizione $u(0) = 0$ fornisce $c_1 = 0$; poi si ha

$$u'(x) = c_2 \cos x + 3$$

da cui $u'(0) = 4$ se e solo se $c_2 = 1$. Quindi la soluzione è data da

$$u(x) = \sin x + 3x$$

da cui $u'(x) = \cos x + 3$, e dunque

$$u'(2\pi) + \frac{u(\pi)}{\pi} = 4 + \frac{3\pi}{\pi} = 7.$$