Sia $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u''(x) - 9u(x) = e^{-x} \\ u(0) = -\frac{1}{8} \\ u'(0) = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Calcolare $u\left(\log\left(\frac{1}{24}\right)\right)$.

SOLUZIONE. L'equazione caratteristica è data da

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

che ha le due soluzioni reali $\lambda_{1,2} = \pm 3$. Ne segue che tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono della forma

$$\bar{u}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

Osserviamo che -1 non è radice caratteristica, per cui cerchiamo una soluzione particolare della forma $u_p(x) = ae^{-x}$. Si ha $u_p'(x) = -ae^{-x}$ e $u_p''(x) = ae^{-x}$. Dunque deve essere

$$ae^{-x} - 9ae^{-x} = e^{-x}$$

per ogni x reale. Quindi si ha $a = -\frac{1}{8}$. L'integrale generale è dunque dato da

$$u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{8} e^{-x}.$$

La condizione $u(0) = -\frac{1}{8}$ fornisce

$$-\frac{1}{8} = c_1 + c_2 - \frac{1}{8}$$

e quindi $c_1 + c_2 = 0$. Poi si ha

$$u'(x) = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{8} e^{-x},$$

da cui $u'(0) = \frac{1}{8}$ dà

$$\frac{1}{8} = 3c_1 - 3c_2 + \frac{1}{8}.$$

Ne segue che $c_1 - c_2 = 0$; per cui $c_2 = c_2 = 0$. La soluzione è quindi data da

$$u(x) = -\frac{1}{8} e^{-x}.$$

Allora si ha

$$u\left(\log\left(\frac{1}{24}\right)\right) = -\frac{1}{8} e^{-\log\left(\frac{1}{24}\right)} = -\frac{1}{8} e^{\log 24} =$$

$$= -\frac{1}{8} 24 = -3.$$