Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) + u(x) = 4e^x \\ u(0) = 2 \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Il polinomio caratteristico è dato da

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1$$

che ha due radici coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Ne segue che due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata, sono date da

$$u_1(x) = e^{-x} \quad u_2(x) = xe^{-x}.$$

Per trovare la soluzione dell'equazione, si può cercare una soluzione particolare della forma

$$v(x) = \alpha e^x$$

Si ha

$$v'(x) = \alpha e^x = v''(x).$$

Quindi, affinchè v sia soluzione deve essere

$$v''(x) + 2v'(x) + v(x) = 4e^x$$

e dunque

$$4\alpha e^x = 4e^x$$

per ogni x reale; tale equazione (in α) ha la soluzione $\alpha = 1$. Ne segue che una soluzione dell'equazione è

$$v(x) = e^x.$$

Quindi tutte le soluzioni sono date da

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + e^x.$$

Inserendo $u(0) = 2$ si ha

$$2 = u(0) = 1 + c_1 \Longrightarrow c_1 = 1.$$

Calcolando $u'(x)$, si ottiene

$$u'(x) = e^x - e^{-x}(1 + c_2 x) + e^{-x} c_2.$$

Infine si ha

$$0 = u'(0) = 1 - 1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 0.$$

Ne segue che la soluzione particolare è

$$u(x) = e^x + e^{-x}.$$