Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = 2\sin x \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = -1. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Il polinomio caratteristico è dato da

$$\lambda^2 + 1$$

che ha due radici complesse, che sono $\lambda_{1/2} = \pm i$; ne segue che due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata sono

$$u_1(x) = \cos x \quad u_2(x) = \sin x.$$

Passiamo ora alla non omogenea; si può cercare la soluzione particolare nella classe di funzioni date da

$$v(x) = \alpha x \sin x + \beta x \cos x.$$

essendo 1 parte immaginaria della radice caratteristica. Si ha

$$v'(x) = \alpha \sin x + \alpha x \cos x + \beta \cos x - \beta x \sin x$$

mentre

$$v''(x) = 2\alpha \cos x - \alpha x \sin x - 2\beta \sin x - \beta x \cos x.$$

Deve quindi essere

$$2\alpha \cos x - 2\beta \sin x = 2\sin x$$

per ogni x reale; quindi sarà $\alpha = 0$ e $\beta = -1$. La soluzione particolare allora sarà data da

$$v(x) = -x \cos x.$$

Allora la soluzione generale è data da

$$u(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x - x \cos x.$$

Dunque si ha

$$1 = u(0) = c_1$$

e

$$u'(x) = \cos x(1 + c_2) - \sin x(c_1 - x) - \cos x$$

da cui

$$-1 = u'(0) = 1 + c_2 - 1 \Longrightarrow c_2 = -1.$$

La soluzione finale è quindi

$$u(x) = \cos x(1 - x).$$