Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 2e^x \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 2. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Il polinomio caratteristico è dato da

$$\lambda^2 - 1$$

per cui le due soluzioni dell'omogenea associata sono

$$u_1(x) = e^x \quad u_2(x) = e^{-x}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$v(x) = \alpha x e^x.$$

Si ha

$$v'(x) = \alpha e^x + \alpha x e^x$$

e

$$v''(x) = 2\alpha e^x + \alpha x e^x$$

da cui, come al solito dovrà essere, sostituendo nell'equazione:

$$2\alpha e^x = 2e^x$$

per ogni x reale, quindi $\alpha = 1$. La soluzione particolare è data da

$$v(x) = xe^x.$$

Allora tutte le soluzioni sono date da

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x.$$

La condizione $u(0) = 1$ dà

$$c_1 + c_2 = 1$$

mentre la condizione $u'(0) = 2$ porta a

$$c_1 - c_2 + 1 = 2.$$

Ne segue facilmente

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 0.$$

Allora la soluzione finale è

$$u(x) = e^x(x + c_1).$$