Risolvere il problema differenziale

$$\begin{cases} u''(x) + 4u(x) = 5e^x \\ u(0) = 1 \\ u(a) = b \end{cases}$$

al variare di $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE. Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 + 4$$

che ha come radici i valori $\lambda_{1/2} = \pm 2i$; due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata sono quindi

$$u_1(x) = \cos 2x \quad u_2(x) = \sin 2x.$$

Passando alla non omogenea, si vede subito che una soluzione particolare è

$$v(x) = e^x.$$

Dunque

$$1 = u(0) = 1 + c_1 \Longrightarrow c_1 = 0.$$

Inoltre

$$b = u(a) = e^a + c_2 \sin 2a$$

da cui

$$c_2 = \frac{b - e^a}{\sin 2a}, \quad a \neq k\frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

e finalmente

$$u(x) = e^x + \frac{b - e^a}{\sin 2a} \sin 2x, \quad a \neq k\frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Se invece $a = k\frac{\pi}{2}$ per qualche intero k, allora si hanno infinite soluzioni se $b = e^{k\frac{\pi}{2}}$, date da

$$u(x) = e^x + c_2 \sin 2x$$

mentre se $b \neq e^{k\frac{\pi}{2}}$, non si hanno soluzioni.