*Sia* $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(x) + x^4 u(x) = x^4 \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

*Calcolare*

$$\frac{1}{\log(u(1) - 1)}.$$

SOLUZIONE. L'integrale generale è dato da

$$u(x) = e^{-\frac{x^5}{5}} \int x^4 e^{\frac{x^5}{5}}\, dx = ce^{-\frac{x^5}{5}} + 1.$$

Si ha dunque $u(0) = 2$ se e solo se $c + 1$, per cui la soluzione particolare è data da

$$u(x) = e^{-\frac{x^5}{5}} + 1.$$

Quindi $\log(u(1) - 1) = -\frac{1}{5}$, ed infine

$$\frac{1}{\log(u(1) - 1)} = -5.$$