

*Risolvere il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(x) = xu(x) \sin x \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

SOLUZIONE. Tale equazione è lineare; calcoliamo dunque

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cos x + k_1$$

e

$$\int 0 dx = k_2.$$

La soluzione è dunque data da

$$u(x) = e^{\sin x - x \cos x} (c + 0) = ce^{\sin x - x \cos x}.$$

Infine

$$1 = u(0) = ce^0 = c \implies c = 1.$$

La soluzione particolare è quindi

$$u(x) = e^{\sin x - x \cos x}.$$