

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) + 3x^2u(x) = x^2 \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

SOLUZIONE. L'equazione è lineare; calcolando

$$\int -3x^2 dx = -x^3 + k_1$$

e

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dt = \frac{1}{3} e^{x^3} + k_2$$

la soluzione generale è data da

$$u(x) = e^{-x^3} \left(c + \frac{1}{3} e^{x^3} \right) = ce^{-x^3} + \frac{1}{3}.$$

Infine

$$1 = u(0) = c + \frac{1}{3} \implies c = \frac{2}{3}$$

da cui

$$u(x) = \frac{2}{3} e^{-x^3} + \frac{1}{3}.$$