Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = tu^2(x)\log x \\ u(1) = 4. \end{cases}$$

SOLUZIONE. L'equazione data è a variabili separabili; calcoliamo dunque

$$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + k_1$$

e

$$\int x \log x dt = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{x^2(2\log x - 1)}{4} + k_2.$$

Ne segue che la soluzione è data da

$$-\frac{1}{u(x)} = \frac{x^2(2\log x - 1)}{4} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

da cui

$$u(x) = \frac{4}{x^2(1 - 2\log x) + c}.$$

Per trovare la soluzione particolare, imponiamo $u(1) = 4$:

$$4 = u(1) = \frac{4}{1 + c}$$

da cui $c = 0$. Ne segue che la soluzione particolare è (localmente):

$$u(x) = \frac{4}{x^2(1 - 2\log x)}.$$

Osserviamo che è sempre $u \neq 0$; tale soluzione è quindi definita in tutto $(0, +\infty)$.