

Verificare che la forma differenziale

$$\omega = \left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy$$

è esatta.

SOLUZIONE. La forma è definita su un insieme che non è stellato; si verifica immediatamente che si tratta di una forma chiusa; procedendo come sopra cerchiamo  $z(x, y)$  tale che

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{1}{x},$$

ovvero si vede subito che deve essere  $z(x, y) = xy - \log|x| + c(y)$ . Derivando rispetto ad  $y$  si trova

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + c'(y)$$

che deve essere

$$x - \frac{1}{y}.$$

Ne segue che  $c(y) = -\log|y|$ , e dunque  $z(x, y)$  sarà data da  $z(x, y) = xy - \log|xy|$ .