

Verificare che la forma differenziale

$$\omega = (2x - y)dx + (2y - x)dy$$

è esatta, e trovarne una primitiva.

SOLUZIONE. La forma è chiusa e definita su tutto il piano; ne segue che è esatta. Si ha poi

$$\int (2x - y)dx = x^2 - xy + c(y) = z(x, y).$$

Deve essere

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 2y - x$$

da cui $c'(y) = 2y$, indi per cui, per esempio $c(y) = y^2$. Allora una primitiva è data da $z(x, y) = x^2 - xy + y^2$.