

Determinare il dominio della funzione

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - xy}}{\log(1 - x^2 - y^2)}$$

e dire se esso è aperto, chiuso, nè aperto nè chiuso.

SOLUZIONE. Il dominio è dato dalle condizioni

$$\begin{cases} x^2 - xy \geq 0 \\ 0 < x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

che equivalgono alle seguenti condizioni

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq y \\ 0 < x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq y \\ 0 < x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

Tale dominio non è nè aperto nè chiuso; infatti, ad esempio, l'origine è aderente al dominio, ma non vi appartiene, quindi non si ha la chiusura. Per altro i punti del dominio sull'asse delle y sono punti di bordo, per cui il dominio non è aperto.