

Sia D il trapezio di vertici $(1,0)$, $(2,1)$, $(-2,1)$, $(-1,0)$. Sia C la curva-bordo di D . Sia $\vec{F}(x,y) = 9xy\vec{i} + x^5y^2\vec{j}$. Calcolare

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds.$$

SOLUZIONE. C è una curva piana chiusa; per il Teorema della divergenza piano si ha

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_D \operatorname{div} \vec{F}(x,y) dx dy = \int_D (9y + 2x^5y) dx dy = \\ &= 18 \int_{D^+} y dx dy, \end{aligned}$$

dove $D^+ = \{(x,y) \in D : x \geq 0\}$. Per riduzione si ha

$$18 \int_{D^+} y dx dy = 18 \int_0^1 \left(\int_0^{y+1} y dx \right) dy = 15.$$