

Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$; sia C la curva-bordo di D percorsa una sola volta in senso antiorario. Sia $\vec{F}(x, y) = 6y^4\vec{i} + (y^2 - 6x^2)\vec{j}$. Calcolare

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

SOLUZIONE. C è una curva piana chiusa; per il Teorema di Green-Stokes piano si ha

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D (-12x - 24y^3) dx dy = -24 \int_{D^+} x dx dy.$$

dove $D^+ = \{(x, y) \in D : y \geq 0\}$; dunque si ha, in coordinate polari,

$$-24 \int_{D^+} x dx dy = -24 \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} \varrho^2 \cos \vartheta d\vartheta \right) d\varrho = -56.$$