

Sia $z = g(y)$, $a \leq y \leq b$, dove $0 \leq a < b < +\infty$, una funzione di classe C^1 su $[a, b]$. Consideriamo la superficie di rotazione S generata da una rotazione completa del grafico di g attorno all'asse z . Calcolare l'area di S .

SOLUZIONE. Esprimiamo S in forma parametrica; sia $T = [a, b] \times [0, 2\pi]$, e $\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + g(u) \vec{k}$, con $(u, v) \in T$. Si ottiene, a conti fatti,

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = u \sqrt{1 + (g'(u))^2};$$

dunque

$$\begin{aligned} |S| &= \int_T u \sqrt{1 + (g'(y))^2} du dv = \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b u \sqrt{1 + (g'(u))^2} du \right) dv = \\ &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy, \end{aligned}$$

risultato noto per altre vie più laboriose.