

Data

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

allora f risulta continua in $(0, 0)$?

SOLUZIONE. Andiamo a calcolare:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

Passando a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases}$$

si ha che

$$F(\varrho, \vartheta) = f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) = \frac{\varrho^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{\varrho^2} = \varrho \cos^2 \vartheta \sin \vartheta$$

da cui

$$0 \leq |F(\varrho, \vartheta)| \leq \varrho.$$

Per il Teorema del confronto si ha

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} F(\varrho, \vartheta) = 0$$

uniformemente in $\vartheta \in [0, 2\pi)$; dunque effettivamente il limite vale 0, e quindi f è continua nell'origine.