

Dire se è continua nell'origine la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

SOLUZIONE. La funzione data è sicuramente continua per  $(x, y) \neq (0, 0)$ , poichè composizione di funzioni continue; per controllare la continuità nell'origine andiamo a calcolare:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y).$$

Passando a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases}$$

si ha che

$$F(\varrho, \vartheta) = f(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta) = \frac{\varrho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{\varrho} = \varrho \cos \vartheta \sin \vartheta$$

da cui

$$0 \leq |F(\varrho, \vartheta)| \leq \varrho.$$

Per il Teorema del confronto si ha

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} F(\varrho, \vartheta) = 0$$

uniformemente in  $\vartheta \in [0, 2\pi)$ ; dunque effettivamente il limite vale 0, e quindi  $f$  è continua nell'origine.