

Studiare la continuità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

SOLUZIONE. La funzione data è continua se $(x, y) \neq (0, 0)$, poichè composizione di funzioni continue. Per controllare la continuità in $(0, 0)$ calcoliamo

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x^2 + y^2) \log(x^2 + y^2)$$

Allo scopo, chiamiamo $x^2 + y^2 = t$; allora calcoliamo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \log t = - \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\log h}{h} = 0$$

dove abbiamo posto $t = \frac{1}{h}$. Per composizione anche il limite dato vale $0 = f(0, 0)$; quindi f è continua anche in $(0, 0)$.