Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{7x^3}{x^4+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sia x_M l'unico punto di massimo locale per f. Quanto vale $8x_M f(x_M)$?

SOLUZIONE. La funzione data è definita a derivabile su tutto $\mathbb{R}$; quindi i massimi locali devono essere punti critici. Si ha

$$f'(x) = \frac{21x^2(x^4+1) - 7x^3(4x^3)}{(x^4+1)^2} = \frac{-7x^6 + 21x^2}{(x^4+1)^2}.$$

Dunque $f'(x) = 0$ se e solo se

$$-7x^2(x^4-3) = 0$$

e quindi i punti critici sono $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt[4]{3}$ e $x_3 = \sqrt[4]{3}$. Ora $f'(x) > 0$ se e solo se $x^4 - 3 < 0$, che equivale a $x^2 - \sqrt{3} < 0$, e quindi $x \in (-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3})$. Quindi x_1 è punto di flesso a tangente orizzontale, x_2 è minimo locale, e x_3 è l'unico massimo locale. Dunque si ha $x_M = \sqrt[4]{3}$ da cui

$$8x_M f(x_M) = 42.$$