Sia f data da

$$f(x) = -x^2 e^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Siano x_m l'unico punto di minimo locale di f, e x_M l'unico punto di massimo locale di f; calcolare

$$f(x_M) + \frac{4e^{-2}}{f(x_m)} - \frac{2}{x_m}.$$

SOLUZIONE. Anche in questo caso la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$; andiamo quindi alla ricerca dei punti critici. Si ha

$$f'(x) = -2xe^{-2x} + 2x^2 e^{-2x} = 2xe^{-2x}(x-1)$$

da cui $f'(x) = 0$ se e solo se $x_1 = 0$ o $x_2 = 1$. Per quanto riguarda il segno di f' si ha che $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Dunque x_1 è punto di massimo locale, mentre x_2 è punto di minimo locale. Allora $x_M = 0$ e $x_m = 1$, da cui

$$f(x_M) + \frac{4e^{-2}}{f(x_m)} - \frac{2}{x_m} = -6.$$