Trovare gli eventuali massimi e minimi liberi della funzione

$$f(x,y) = x^2y - x^4 - y^3.$$

SOLUZIONE. f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$, e dunque i massimi ed i minimi liberi devono essere punti critici; cerchiamo quindi le soluzioni di $\nabla f(x,y) = 0$, ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} x(y - 2x^2) = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$P_1 = (0,0) \quad P_2 = \Big(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}\Big) \quad P_3 = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{6}\Big).$$

Calcoliamo ora l'Hessiano di f:

$$H = \begin{pmatrix} 2y - 12x^2 & 2x \\ 2x & -6y \end{pmatrix}$$

dunque

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero il punto $(0,0)$ necessita di uno studio locale; osserviamo che $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$, e che, lungo la retta $x = 0$, $f(x,y) = -y^3$. Ne segue che in un qualsiasi intorno di $(0,0)$, f assumerà sia valori positivi sia valori negativi: di conseguenza $(0,0)$ è punto di sella per f. Per quanto riguarda P_2 si ha

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Volendo calcolare gli autovalori di $H(P_2)$, si deve risolvere

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$3\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$$

che ha due soluzioni negative; ne segue che P_2 è un massimo locale. Infine per P_3 si ha

$$H(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Con conti analoghi, anche P_3 risulta massimo locale per f.