Trovare e classificare tutti i punti stazionari di $f(x,y,z) = \sin x - y^2 - e^{z^2}$.

SOLUZIONE. $\nabla f = 0$ porta al sistema

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ -2y = 0 \\ -2ze^{z^2} = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $P_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0, 0\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$. L'Hessiano di f è dato da

$$H = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2e^{z^2} - 4ze^{z^2} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$H(P_k) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori strettamente negativi se k è pari, da cui P_k punti di massimo, mentre ha autovalori di segno alterno se k è dispari, da cui P_k punti di sella.