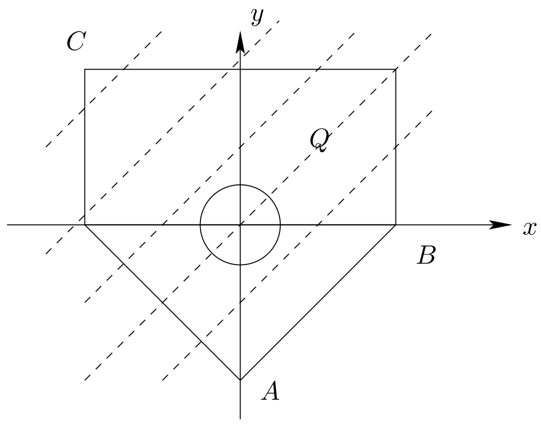
Sia $f(x,y) = y - x$*; sia* $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\,, |x| \leq 4\,, |x| - 4 \leq y \leq 4\}$*. Siano* M *ed* m *i valori massimo e minimo assunti da* f *in* Q*. Calcolare* $M - 3m$*.*

SOLUZIONE. Anzitutto f non ha punti critici all'interno di Q; infatti $\nabla f = 0$ se e solo se $x = y = 0$, ed il punto $(0,0)$ non appartiene a Q. Inoltre f è continua e Q è un insieme chiuso e limitato. Per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti su Q. Tali punti, per quanto detto, non possono stare nella parte interna di Q, devono perciò stare sulla frontiera di Q. Osserviamo ora che le linee di livello per f sono date dalle curve di equazioni

$$y - x = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

ovvero il fascio di rette parallele alla retta $y = x$.



Consideriamo ora i punti $A = (0,-4)$, $B = (4,0)$ e $C = (-4,4)$; supponiamo ora che ci sia un punto di massimo assoluto che non si trovi sul segmento AB e non si trovi nel punto C. Allora dalla figura di sopra è evidente che f dovrebbe avere massimo assoluto assunto anche all'interno di Q, contro il fatto che f non ha punti stazionari interni. Vale la stessa conclusione circa i punti di minimo assoluto per f. Ne segue che che il massimo ed il minimo assoluti di f sono assunto nel punto C o sul segmento AB. Ma $f(C) = f(-4,4) = 8$, mentre per ogni P che sta sul segmento AB si ha $f(P) = -4$. Dunque il minimo assoluto su Q vale -4 mentre il massimo assoluto su Q vale 8. Quindi si ha $M - 3m = 20$.