Sia $f(x,y) = x^2 + y^2$*; sia* $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\,, |x| \leq 4\,, |x| - 4 \leq y \leq 4\}$*. Siano* M *ed* m *i valori massimo e minimo assunti da* f *in* Q*. Calcolare* $M - 3m$*.*

SOLUZIONE. Anzitutto f non ha punti critici all'interno di Q; infatti $\nabla f = 0$ se e solo se $x = y = 0$, ed il punto $(0,0)$ non appartiene a Q. Inoltre f è continua e Q è un insieme chiuso e limitato. Per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti su Q. Tali punti, per quanto detto, non possono stare nella parte interna di Q, devono perciò stare sulla frontiera di Q. Osserviamo che $f(x,y)$ non è altro che la distanza del punto (x,y) da $(0,0)$; ne segue che, osservando il disegno di Q, i punti a distanza massima da $(0,0)$ in Q sono i punti $(\pm 4, 4)$, mentre i punti a distanza minima da $(0,0)$ in Q sono i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Quindi si trova $M = f(\pm 4, 4) = 32$, mentre $m = 1$, da cui $M - 3m = 29$.