Determinare massimi e minimi per la funzione

$$f(x,y) = xy$$

sul vincolo

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \right\}.$$

SOLUZIONE. C è chiuso e limitato, ed f è continua; dunque f ha massimo e minimo assoluti su C. Inoltre C non ha parte interna, per cui cerchiamo tali punti con il Metodo dei moltiplicatori di Lagrange: $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 1$ è differenziabile ed il suo gradiente è

$$\nabla g(x,y) = (2x + y, 2y + x)$$

che si annulla solo nell'origine, che non è un punto di C. Consideriamo quindi

$$\phi(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 1)$$

e risolviamo $\nabla\phi(x,y,\lambda) = 0$, ovvero:

$$\begin{cases} y + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ x + 2y\lambda + x\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono facilmente le soluzioni

$$P_{1/2} = \Big(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{3} \Big) \quad P_{3/4} = (\pm 1, \mp 1, 1).$$

Ora, osserviamo che

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{1}{3} \quad f(P_3) = f(P_4) = -1.$$

Dunque sicuramente $P_{1/2}$ sono massimi assoluti di f,e $P_{3/4}$ sono minimi assoluti di f (su C).