Determinare, tra i punti della curva piana

$$g(x, y) = 4x^2 + 6xy + 4y^2 - 8 = 0$$

quelli a distanza massima ed a distanza minima dall'origine degli assi.

SOLUZIONE. Cerchiamo, allo scopo, massimi e minimi assoluti per la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

vincolata sulla curva $g(x, y) = 0$; (f rappresenta il quadrato della distanza di un punto (x, y) dall'origine degli assi; massimizzare o minimizzare il quadrato è equivalente a massimizzare o minimizzare la distanza). Osserviamo che la curva data è un ellisse, ed essendo tale, è un insieme chiuso e limitato; f è continua ovunque, e dunque ammette massimo e minimo assoluto su $g(x, y) = 0$. g è differenziabile ed è immediato verificare che il suo gradiente si annulla solo nell'origine, che non è un punto di C. Andiamo quindi ad applicare il Metodo di Lagrange:

$$\phi(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(4x^2 + 4y^2 + 6xy - 8).$$

I punti critici di ϕ sono dati da

$$\begin{cases} 2x + 8\lambda x + 6\lambda y = 0 \\ 2y + 8\lambda y + 6x\lambda = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 + 6xy - 8 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono le soluzioni

$$P_{1/2} = (\pm 2, \mp 2, -1) \quad P_{3/4} = \Big(\pm \frac{6}{\sqrt{161}}, \mp \frac{22}{\sqrt{161}}, \frac{1}{7}\Big).$$

Osservando infine che

$$f(P_1) = f(P_2) = 8 \quad f(P_3) = f(P_4) = \frac{516}{161} < 8$$

ne segue che i punti a distanza massima sono P_1 e P_2, mentre i punti a distanza minima sono P_3 e P_4.