

Trovare, tra i punti della curva

$$g(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

quelli a distanza massima ed a distanza minima dall'origine degli assi.

SOLUZIONE. In questo esercizio vale lo stesso discorso fatto all'inizio dell'esercizio (18). Minimizziamo quindi  $f(x, y) = x^2 + y^2$  sull'ellisse di equazione

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0.$$

Dunque si ha

$$\phi(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8).$$

E quindi  $\nabla\phi = 0$  se e solo se

$$\begin{cases} 2x + 10\lambda x + 6\lambda y = 0 \\ 2y + 6\lambda x + 10\lambda y = 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha le seguenti soluzioni

$$x = y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

oppure

$$x = -y = \pm\sqrt{2}.$$

Calcolando i valori di  $f$  si ha

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

e

$$f\left(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right) = 4,$$

da cui segue banalmente che i punti a minima distanza sono dati da

$$P_{1/2} = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

mentre i punti a distanza massima sono

$$P_{3/4} = (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}).$$