*Trovare massimi e minimi assoluti della funzione*

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - x + 1$$

*sulla circonferenza di equazione*

$$x^2 + y^2 = 4$$

**a)** *sostituendo le coordinate $(x,y)$ del generico punto variabile sulla circonferenza con delle funzioni di una sola variabile;*

**b)** *con il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange.*

SOLUZIONE.

**a)** Sostituendo i due archi di circonferenza

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

si ottiene una funzione di una sola variabile data da

$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 5.$$

Dunque i punti critici di tale funzione sono dati da

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

che ha come soluzioni

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Intanto si hanno 4 punti critici per $f$:

$$P_{1/2} = (1, \pm\sqrt{3}) \quad P_{3/4} = \left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{35}}{3}\right).$$

Se calcoliamo il valore di $f$ in tali punti, si ha

$$f(P_{1/2}) = 4 \quad f(P_{3/4}) = \frac{142}{27}.$$

Osserviamo che tale metodo esclude lo studio del bordo degli archi di circonferenza sostituiti nella funzione; su tale bordo si ha

$$f(2,0) = 7 \quad f(-2,0) = -5$$

e quindi, confrontando, $(2,0)$ e $(-2,0)$ sono il massimo ed il minimo assoluti di $f$ sulla circonferenza data.

**b)** Con il metodo dei Moltiplicatori di Lagrange, che si può applicare in quanto molto facilmente si verificano le proprietà necessarie di $g$, si ha

$$\phi(x,y,\lambda) = x^3 + y^2 - x + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

che ha come punti critici le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

cioè

$$(\pm 2, 0) \quad (1, \pm\sqrt{3}) \quad \left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$$

che sono gli stessi punti del punto $a$); si conclude quindi come sopra.