Determinare massimi e minimi liberi della funzione

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4.$$

SOLUZIONE. I punti critici di f sono dati dal sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4(e^x - y)^3 e^x = 0 \\ -4(e^x - y)^3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$P_1 = (0, 1) \quad P_2 = (1, e) \quad P_3 = \left(1, \frac{1}{e}\right).$$

L'Hessiano di f è

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 + 4e^x(e^x - y)^3 + 12e^{2x}(e^x - y)^2 & -12(e^x - y)^2 e^x \\ -12(e^x - y)^2 e^x & 12(e^x - y)^2. \end{pmatrix}$$

Osserviamo che tutti i punti critici annullano $\det H$, per cui per tutti si necessita uno studio locale. Osserviamo inoltre che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq 0 \Longleftrightarrow y \geq e^x$$

per cui fissato x, la funzione $y \longmapsto f(x, y)$ è crescente se $y > e^x$, ed è decrescente se $y < e^x$; lungo la curva $y = e^x$, $f(x, y) = x^4 - 2x^2$ che ha un massimo locale in $x = 0$ e due minimi assoluti in $x = \pm 1$; dunque il punto $(0, 1)$ è di sella per f. Invece i punti $(1, e)$ e $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ sono minimi; infatti, ad esempio, consideriamo $(1, e)$, e l'intorno

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| |x - 1| < 1, |y - e| < 1\right\}.$$

Allora preso un generico $P = (x, y) \in U$, si ha

$$f(x, y) \geq f(x, e^x) \geq f(1, e)$$

ne segue che $(1, e)$ è minimo locale; analogamente si vede che anche $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ è minimo locale.